

https://doi.org/10.51885/3134-8025_IJCS_2026_3_10

XFTAP 55.30.31

БЕЙСЫЗЫҚТЫ ЖАЗЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ТРАЕКТОРИЯЛЫҚ БАСҚАРУ ӘДІСІ

МЕТОД ТРАЕКТОРНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ ПЛОСКИМИ СИСТЕМАМИ С УПРАВЛЕНИЕМ

A TRAJECTORY CONTROL METHOD FOR NONLINEAR DIFFERENTIALLY FLAT SYSTEMS

М.Б. Толыкбаева ¹, Ә.Т. Құсайын-Мұрат ¹, А.Е. Даирбекова ¹,
А.Т. Кадыроldина ^{2*}, А.Л. Красавин ¹, В. Beszédes ³

¹Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан

²Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан

³Обуда университеті, Будапешт қ., Венгрия

*Жауапты автор: Кадыроldина Альбина Талапжановна, e-mail: kadyroldina_at@enu.kz

Түйінді сөздер:

Траекториялық басқару,
робот-манипулятор,
есептелетін моменттер
әдісі (СТС), бейсызықты
жүйелер, динамикалық
модель, Лагранж
формулировкасы,
дифференциалдық
жазықтық, жазық шығыс,
кері байланыс, басқаруды
синтездеу

ТҮЙІНДЕМЕ

Мақалада басқарылатын бейсызықты жазық жүйелер үшін траекториялық басқару әдісі ұсынылады, ол жалпыланған Computed Torque Control (СТС) әдісі ретінде анықталады. Дәстүрлі түрде тізбекті манипуляторларды басқаруда қолданылатын классикалық Computed Torque Control әдісін А класына жатқызылатын арнайы типтегі жазық жүйелер үшін арналған траекториялық басқарудың жалпы әдісінің жекелеген жағдайы ретінде қарастыруға болатыны көрсетілген. Мұндай жүйелерді сызықтандыру тәсілі ұсынылады, ол бастапқы бейсызық жүйені басқару жүйелері теориясы тұрғысынан эквивалентті болып табылатын тривиал сызықтық басқару жүйесіне келтіретін С класты координаталық түрлендірулерге негізделген. С класты түрлендірулер физикалық тұрғыдан іске асырылатын сигнал түрлендіргіштерін пайдалану арқылы аппараттық жүзеге асыруға мүмкіндік беретіні атап өтіледі. А класына жататын жазық жүйелердің жазық шығысы жүйенің тек ағымдағы күйіне ғана тәуелді болатыны көрсетілген, бұл ұсынылған әдістің қолдану аясын басқа бейсызық басқару объектілеріне, соның ішінде мобильді роботтардың кейбір түрлеріне кеңейтеді. Сонымен қатар классикалық СТС әдісін талдау траекториялық басқару контроллерінің құрамына кіретін сызықтық реттегіш үшін ауытқуларды басу критерийін тұжырымдауға мүмкіндік береді.

Ключевые слова:

Траекторное управление,
робот-манипулятор,
метод вычисляемых
моментов (СТС),
нелинейные системы,
динамическая модель,

АННОТАЦИЯ

В статье представлен метод траекторного управления нелинейными плоскими системами с управлением, обозначаемый как обобщенный метод Computed Torque Control (СТС). Показано, что классический метод Computed Torque Control, традиционно применяемый для последовательных манипуляторов, может рассматриваться как частный случай общего метода траекторного управления



© 2026 М.Б. Толыкбаева, Ә.Т. Құсайын-Мұрат, А.Е. Даирбекова,
А.Т. Кадыроldина, А.Л. Красавин, В. Beszédes

Бұл жұмыс Creative Commons Attribution 4.0 халықаралық лицензиясы
(CC BY 4.0) бойынша таратылады.
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

лагранжева
формулировка,
дифференциальная
плоскость, плоский
выход, обратная связь,
синтез управления.

для плоских систем специального вида, отнесенных к классу А. Предложен подход к линеаризации таких систем, основанный на координатных преобразованиях класса С, приводящих исходную нелинейную систему к эквивалентной ей тривиальной линейной системе с управлением при сохранении эквивалентности в смысле теории систем с управлением. Отмечено, что преобразования класса С допускают аппаратную реализацию с использованием физически реализуемых преобразователей сигналов. Показано, что плоские системы класса А обладают плоским выходом, зависящим только от текущего состояния системы, что расширяет область применения метода на другие нелинейные объекты управления, включая некоторые типы мобильных роботов. Кроме того, анализ классического метода CTC позволяет сформулировать критерий подавления возмущений для линейного регулятора, входящего в состав контроллера траекторного управления.

keywords:

Trajectory control, robotic manipulator, computed torque control (CTC), nonlinear systems, dynamic model, Lagrangian formulation, differential flatness, flat output, feedback, control synthesis.

ABSTRACT

The paper presents a trajectory control method for nonlinear differentially flat control systems, referred to as the generalized Computed Torque Control (CTC) method. It is shown that the classical Computed Torque Control, traditionally applied to serial manipulators, can be regarded as a special case of a general trajectory control method for a specific class of flat systems, denoted as class A systems. An approach to the linearization of such systems is proposed, based on class C coordinate transformations, which transform the original nonlinear control system into an equivalent trivial linear control system while preserving equivalence in the sense of control system theory. It is noted that class C transformations admit hardware implementation using physically realizable signal-processing elements. It is shown that flat systems of class A possess a flat output depending only on the current state of the system, which extends the applicability of the proposed method to other nonlinear control objects, including certain types of mobile robots. In addition, the analysis of the classical CTC method makes it possible to formulate a disturbance rejection criterion for the linear controller included in the trajectory control scheme.

КІРІСПЕ

Траекториялық басқару робот-манипуляторлар үшін қазіргі заманғы басқару теориясы мен робототехниканың негізгі әрі өзекті мәселелерінің бірі болып табылады (Krasavin et al., 2025; Kussaiyn-Murat et al., 2025; Shadrin et al., 2020). Бұл манипуляторлар динамикасының айқын бейсызықтылығымен, буындар арасындағы өзара байланыстардың күштілігімен, сондай-ақ нақты пайдалану жағдайларында сөзсіз туындайтын параметрлік анықталмағандықтар мен сыртқы әсерлердің болуымен түсіндіріледі. Робот-манипулятор бірнеше еркіндік дәрежесіне ие көпбуынды механикалық жүйе ретінде жұмыс органын жұмыс кеңістігінде берілген траекториялар бойымен дәл орналастыруға және бағдарлауға арналған. Осыған байланысты мұндай жүйелердің қозғалысын басқару жалпыланған координаталарда басқарушы әсерлерді қалыптастыруға келіп тіреледі, бұл берілген траекторияны ең аз ауытқумен қадағалауды қамтамасыз етеді және модельге негізделген басқару әдістерінің өзектілігін айқындайды (Siciliano&Khatib, 2020; Spong, Hutchinson&Vidyasagar 2020).

Траекториялық басқару есебін шешуге арналған модельге негізделген тәсілдердің ішінде ең кең таралғандарының бірі - есептелетін моменттер әдісі (computed torque control, CTC) болып табылады. Бұл әдіс манипулятордың толық динамикалық моделін

пайдалануға негізделеді және қозғалыс теңдеулеріндегі бейсызық мүшелерді компенсациялау арқылы кері байланыс бойынша сызықтықты жүзеге асырады. Нәтижесінде бейсызық жүйені басқару есебі жалпыланған координаталар кеңістігінде эквивалентті сызықтық жүйені басқару есебіне келтіріледі. Қазіргі заманғы зерттеулер (Ahmed, 2021) СТС әдісінің, әсіресе адекватты модель мен сенімді кері байланыс болған жағдайда, тізбекті және параллель манипуляторлар үшін траекторияны дәл қадағалаудың тиімді құралы болып қала беретінін растайды.

Жалпы түрде траекториялық басқару есебі жүйені фазалық кеңістікте берілген $x(t)$ қисығы бойымен алдын-ала анықталған бастапқы күйден берілген терминалдық күйге көшіру есебі ретінде тұжырымдалады. Осы тұрғыда СТС әдісін бейсызық жүйелердің траекториялық басқаруына арналған анағұрлым жалпы әдістер класының жекелеген жағдайы ретінде қарастыруға болады. Модельге негізделген тәсіл аясында басқару заңдары басқару объектісінің физикалық мәнін сипаттайтын математикалық модель ретінде интерпретацияланатын динамикалық теңдеулер негізінде қалыптастырылады. Бұл СТС әдісін backstepping, робастты және адаптивті басқару, сондай-ақ бақылаушылар мен сыртқы әсерлерді компенсациялау құрылғыларын қамтитын біріктірілген схемалар сияқты заманауи бейсызық басқару әдістерімен салыстыруға мүмкіндік береді (Khalil, 2020; Utkin et al., 2020).

Есептелетін моменттер әдісінің тиімділігі манипулятордың математикалық моделінің дәлдігіне, соның ішінде массалық параметрлерге, инерция сипаттамаларына және гравитациялық мүшелерге тікелей тәуелді. Бұл жағдай бірқатар заманауи зерттеулерде ерекше атап өтіледі, онда тіпті модельдегі болмашы қателіктердің өзі траекторияны қадағалау сапасының төмендеуіне әкелуі мүмкін екендігі көрсетілген. Осыған байланысты СТС әдісі қазіргі кезде тек инженерлік алгоритм ретінде ғана емес, айқын физикалық мағынасы бар динамикалық жүйені басқару тәсілі ретінде де қарастырылады. Мұндай көзқарас оны қатаң теориялық талдауды талап ететін және робастты немесе адаптивті механизмдермен толықтыруды қажет ететін басқару әдісі ретінде сипаттайды (Han et al., 2020; Kallel et al., 2025).

Кейбір манипулятор түрлерінің жазық жүйелерге жататыны белгілі (жазық жүйелер теориясы — differential flatness, differentially flat control system, қазақша «жазық жүйелер» деп аударылады). (Rigatos, Abbaszadeh & Pomares, 2023; Wei et al., 2021; Beaver, 2024; Vidaković et al., 2020) еңбектерінде Лагранж формасында сипатталатын толық басқарылатын робот-манипуляторлардың динамикасы дифференциалды-жазық жүйе ретінде ұсынылуы мүмкін екені көрсетілген, мұнда жазық шығыстар ретінде жалпыланған координаталар таңдалады. Бұл тәсіл жүйенің күйлері мен басқарушы әсерлерін интегралдау жүргізбестен, шығыс айнымалысы және оның туындыларының шектеулі саны арқылы өрнектеуге мүмкіндік береді. Нәтижесінде қозғалыс теңдеулері алгебралық формада ұсынылып, басқаруды синтездеу есебі едәуір дәрежеде жеңілдетіледі.

Кейінгі зерттеулерде (Kallel et al., 2025; Pishkhani 2025) бұл тәсіл СТС әдісін дифференциалды жазықтық тұжырымдамасымен адаптивті, робастты және деректерге негізделген (data-driven) әдістермен біріктіру арқылы одан әрі дамытылды. Физикалық тұрғыдан интерпретацияланатын модельді параметрлерді онлайн бағалау, бақылаушылар және оқытылатын компоненттермен үйлестіру траекторияны қадағалау дәлдігін айтарлықтай арттыруға, сондай-ақ анықталмағандықтар мен сыртқы әсерлер жағдайында басқару жүйесінің орнықтылығын қамтамасыз етуге мүмкіндік беретіні көрсетілді.

Осылайша, заманауи зерттеулер есептелетін моменттер әдісінің робот-манипуляторлардың траекториялық басқаруында маңызды орнын сақтап отырғанын растайды. Алайда СТС әдісін дифференциалды-жазық жүйенің траекториялық басқару

тәсілі ретінде қарастыру оның теориялық және практикалық мәнін едәуір тереңдете түседі. Мұндай көзқарас қазіргі жағдайларда бейсызық робототехникалық жүйелерді басқару әдістерін талдау, салыстыру және одан әрі дамыту үшін бірыңғай тұжырымдамалық негіз қалыптастырады.

ӘДІСТЕР

Күштік басқаруы бар тізбекті манипулятор жазық шығуы бар бейсызықты жүйе ретінде мұндай жүйе күй кеңістігі X , басқару кеңістігі U және динамика теңдеуі (1) арқылы анықталады. Жалпы жағдайда күй кеңістігі X және басқару кеңістігі U тиісінше n мен m өлшемді тегіс көпбейінділер болып табылады, яғни $\dim(X) = n$ және $\dim(U) = m$.

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in X, u \in U \quad (1)$$

Атап айтқанда, n буынды тізбекті манипулятор үшін күй векторы x түрінде беріледі (2)

$$x = (\theta \dot{\theta}) \quad (2)$$

мұндағы $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]^T$ вектор, оның компоненттері $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ манипулятордың айналмалы буындарындағы жетектер біліктерінің бұрылу бұрыштарын сипаттайды, ал $\dot{\theta} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dots, \dot{\theta}_n]^T$ манипулятор жетектеріндегі біліктердің бұрыштық жылдамдықтарының векторы (немесе манипулятор буындарының салыстырмалы бұрыштық жылдамдықтары). Қатаң түрде айтқанда, $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\} \theta_k \in S^1$, сондықтан геометриялық тұрғыдан тізбекті манипулятор үшін X фазалық кеңістік $2n$ – өлшемді тегіс көпбейінді болып табылады және $X = T^n \times R^n$ түрінде жазылады, мұндағы $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ n – өлшемді тор.

Траекториялар туралы айтқанда, біз $\gamma: I \rightarrow M$ түріндегі бейнелеулерді қарастырамыз, мұнда $I \subset R$ нақты осьтің интервалы, ал M тегіс көпбейінді. Яғни, біз траекторияларды параметрлік түрде берілген қисықтармен $\gamma(t)$ теңестіріп, t параметрін физикалық тұрғыдан уақыт ретінде, ал I – интервалын уақыт аралығы ретінде интерпретациялаймыз. Басқарылатын жүйенің траекториясы деп $\gamma: I \rightarrow X \times U$ бейнелеуін атаймыз, оның компоненттері үшін $x_\gamma: I \rightarrow X$ және $u_\gamma: I \rightarrow U$ шартын қанағаттандырады (3).

$$\forall t \in I \dot{x}_\gamma(t) = f(x_\gamma(t), u_\gamma(t)) \quad (3)$$

Траекторияның γ компонентасын x_γ жүйенің фазалық кеңістігіндегі траектория деп, ал u_γ компонентасын басқару кеңістігіндегі траектория немесе басқарушы сигналдың траекториясы деп атаймыз. Айта кетейік, егер ерікті уақыт аралығында $I = [0, T]$, басқарушы сигнал $u(t)$ берілсе, онда осы I аралығында анықталған күй кеңістігіндегі кез келген $x(t)$, траекториясы Коши есебінің (4) шешімі болады.

$$\forall t \in I \dot{x} = g(x, t) \quad x(0) = x_0, x_0 \in X \quad (4)$$

мұндағы $g(x, t)$ функциясы (5) теңдеумен анықталады

$$\forall t \in I, x \in X \quad g(x, t) = f(x, u^*(t)) \quad (5)$$

Осылайша, жүйенің берілген бастапқы күйі мен бекітілген уақыт аралығындағы басқарушы әсері осы аралықта басқарылатын жүйенің траекториясын бірімәнді түрде анықтайды. Осы тұрғыда траекториялық басқару есебі жүйені бастапқы күйден $x_0 \in X$ берілген терминалдық күйге $x_t \in X$ уақыт аралығында $t \in [0, T]$ көшіру ретінде тұжырымдалады, мұнда фазалық кеңістіктегі нақты траектория берілген қалаулы траекториядан $x_d(t)$ мүмкіндігінше аз ауытқуы тиіс.

Жазық шығуы бар бейсызықты жүйелер

Күй кеңістігі X және басқару кеңістігі U бар басқарылатын бейсызықты жүйенің $z(t)$ шығуы төменде келтірілген үш шарт орындалған жағдайда жазық шығу деп аталады.

1-шарт. Жалпы жағдайда шығудың ағымдағы мәні z жүйенің күй векторы $x \in X$, басқару сигналы $u \in U$ және басқару сигналының уақыт бойынша алғашқы k туындылары $\dot{u}, \ddot{u}, \dots, u^{(k)} \in R^m$ арқылы анықталатын h функциясымен (6) формуласына сәйкес беріледі

$$\forall t \in R_+ z(t) = h(x(t), u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(k)}(t)) \quad (6)$$

h функциясы жалпы жағдайда $k + 2$ аргументтен тұратын алгебралық функция болып табылады, мұнда $k \geq 0$ (k бүтін сан) басқару сигналының уақыт бойынша алғашқы туындыларының санына сәйкес келеді және жазық шығудың функционалдық тәуелділігін анықтайды; бұл мән нақты басқарылатын жүйеге тәуелді. Функцияның мәндер облысы R^m . Жалпы жағдайда h функциясы $h: X \times U \times R^m \times R^m \times \dots \times R^m \xrightarrow{\cup k} R^m$ түріндегі бейнелеуге сәйкес келеді, ал $k = 0$ болған жағдайда $h: X \times U \rightarrow R^m$ бейнелеуін аламыз. Сонымен қатар, басқарылатын жүйенің жазық шығуы тек жүйенің күй векторына ғана тәуелді болуы мүмкін. Бұл жағдайда жазық шығу (7) формуласы арқылы анықталады.

$$\forall t \in R_+ z(t) = h(x(t)), x \in X \quad (7)$$

мұндағы $h: X \rightarrow R^m$ айта кетейік, кез келген жағдайда $z \in R^m$, яғни жазық шығудың өлшемділігі басқару кеңістігінің өлшемділігімен сәйкес келуі тиіс, $m = \dim(U)$.

2-шарт. Басқарылатын жүйенің күй векторы шығу z мен k осы шығудың уақыт бойынша алғашқы туындылары $\dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(k)}$ арқылы анықталатын функция болып табылады. Яғни, $k+1$ аргументтен тұратын алгебралық функция $\alpha: R^m \times R^m \times \dots \times R^m \xrightarrow{\cup} X_{k+1}$ бар, және ол үшін (8) шарты орындалады, мұнда $x: R_+ \rightarrow X$ басқарылатын жүйенің фазалық кеңістігіндегі ерікті траекториясы.

$$\forall t \in R x(t) = \alpha(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(k)}(t)) \quad (8)$$

3-шарт. Кез келген уақыт мезетінде жүйеге әсер ететін басқару сигналының мәнін шығу z мен k осы шығудың уақыт бойынша алғашқы туындылары $\dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(k)}$ арқылы анықталатын алгебралық функция түрінде көрсетуге болады. Яғни, $\beta: R^m \times R^m \times \dots \times R^m \xrightarrow{\cup} \rightarrow_{k+1} U$ алгебралық функциясы бар және басқарылатын жүйеге әсер ететін басқару сигналының ерікті траекториясы $u(t)$, мен шығу z үшін (9) шарты орындалады

$$\forall t \in R_+ u(t) = \beta(z(t), \dot{z}(t), \dots, z^{(k)}(t)) \quad (9)$$

Күштік басқаруы бар тізбекті манипуляторды жазық шығуы бар бейсызықты жүйе ретінде қарастыру траекториялық басқару алгоритмдерін талдау мен синтездеудің жалпы тұжырымдамалық негізін қалыптастыруға мүмкіндік береді. Алайда басқару әдістерін практикалық іске асыру үшін жүйенің абстрактілі сипаттамасынан манипулятордың динамикалық қасиеттерін ескеретін нақты математикалық моделіне көшу қажет. Осыған байланысты әрі қарай тізбекті манипулятордың динамикасы қарастырылады және ол жазық шығуы бар басқарылатын жүйе ретінде формалды түрде сипатталады, бұл басқару заңдарын одан әрі құру мен талдаудың негізі болып табылады.

Тізбекті манипулятордың динамикасы. Манипуляторды жазық шығуы бар басқарылатын жүйе ретінде сипаттау

Күштік басқаруы бар n – буынды тізбекті манипулятордың динамика теңдеулері Лагранж түрінде (10) формуламен беріледі

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} + G(\theta) = T \quad (10)$$

Толық басқарылатын модель дифференциалды жазық жүйелер класына жатады, себебі оның барлық күйлері, сондай-ақ консервативті емес күштер T жазық шығу арқылы біркәнді түрде қалпына келтірілуі мүмкін.

Díaz (2021) жұмысында манипулятордың жалпыланған бұрыштық координаталар векторы жүйенің жазық шығуы ретінде алынады, яғни осы вектор және оның шектеулі



саныдағы туындылары арқылы жүйенің барлық күйлері мен басқарушы әсерлерін бірмәнді түрде өрнектеуге болады.

$$M(\theta)\ddot{\theta} + C(\theta, \dot{\theta})\dot{\theta} = D(\dot{\theta}, \theta)u \quad (11)$$

мұндағы θ - жалпыланған координаталар, ал u – орындаушы механизмдер арқылы жүзеге асырылатын жүйенің кірісі. Басқару векторы мен жалпыланған координаталар векторының өлшемділіктері бірдей деп және $M(\theta)$ матрицасы жүйенің инерциялық күштерін сипаттайды деп есептей отырып, $C(\theta, \dot{\theta})$ матрицасы центрден тепкіш және центрге тартқыш күштерді, ал $D(\dot{\theta}, \theta)$ матрицасы орындаушы механизмдердің ерекшеліктерін (мысалы, олардың орналасуын немесе мотор-редуктор тораптарының болуын) сипаттайды.

$\dot{x}_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$ белгілерін енгізгенде, (11) теңдеуін кәдімгі дифференциалдық теңдеулер жүйесі түрінде келесі түрде көрсетуге болады:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= M(x_1)^{-1}(C(x_1, x_2) - D(x_1, x_2)u) \end{aligned} \quad (12)$$

Егер D матрицасының өлшемділігі n -ге тең болса, онда (12) теңдеуіндегі барлық элементтер өзара компенсациялануы мүмкін, соның нәтижесінде жүйе тривиалды түрге, яғни $0 = 0$ теңдігіне келтіріледі. Бұл жағдайда басқарушы әсерлердің u жиыны келесі түрде таңдалуы мүмкін:

$$u = D^{-1}(x_1, \dot{x}_1)(M(x_1)\dot{x}_1 + C(x_1, \dot{x}_1)) \quad (13)$$

С класындағы координаталық түрлендірулер

Күй кеңістігі X , басқару кеңістігі U және (14) динамика теңдеуі бар басқарылатын A жүйесін, сондай-ақ күй кеңістігі Y , басқару кеңістігі W және (15) динамика теңдеуі бар басқарылатын B жүйесін қарастырайық

$$\dot{x} = f(x, u) \quad x \in X, u \in U \quad (14)$$

$$\dot{y} = g(y, w) \quad y \in Y, w \in W \quad (15)$$

$\mu: X \rightarrow Y$ диффеоморфизмі және $\rho: X \times U \rightarrow W$ тегіс бейнелеуі берілсін, олар төмендегі 1-шартты қанағаттандырсын.

1-шарт. Кез келген $p \in X$ нүктесі үшін $\rho_p: U \rightarrow W$ бейнелеуі диффеоморфизм болып табылады

$$\forall q \in U \quad \rho_p(q) = \rho(p, q) \quad (p, q) \in X \times U \quad (16)$$

Егер $g(y, w)$ функциясы (17) шартын қанағаттандырса, онда B жүйесі A жүйесіне эквивалент екенін дәлелдейік

$$\forall p = (x, u) \in X \times U \quad d\mu_x(f(x, u)) = g(\mu(x), \rho(x, u)) \quad (17)$$

Дәлелдеу: $\mu: X \rightarrow Y$ және $\rho: X \times U \rightarrow W$ бейнелеулері (18) өрнекпен берілетін $h: X \times U \rightarrow Y \times W$ бейнелеуін анықтайды

$$\forall p = (x, u) \in X \times U \quad h(p) = (\mu(x), \rho(x, u)) \quad (18)$$

Алдымен h бейнелеуінің диффеоморфизм екенін көрсетейік. Ол үшін h^{-1} кері бейнелеуін құру жеткілікті. $\rho: X \times U \rightarrow W$ бейнелеуіне дуальды деп (19) формуламен анықталатын $\rho^*: Y \times W \rightarrow U$, бейнелеуін атайық

$$\forall q = (y, w) \in Y \times W \quad \rho^*(q) = \rho_y^{-1}(w) \quad (19)$$

Осы жағдайда μ бейнелеуіне кері $\mu^{-1}: Y \rightarrow X$, $\rho^*: Y \times W \rightarrow U$ бейнелеуі және ρ бейнелеуіне дуаль $\rho^*: Y \times W \rightarrow U$ бейнелеуі (20) формуласына сәйкес h бейнелеуіне кері $h^{-1}: Y \times W \rightarrow X \times U$ бейнелеуін анықтайды.

$$\forall q = (y, w) \in Y \times W \quad h^{-1}(q) = (\mu^{-1}(y), \rho^*(y, w)) \quad (20)$$

$x_0 \in X$ – А басқару жүйесінің фазалық кеңістігіндегі еркін таңдалған нүкте болсын және бастапқы күйі x_0 мен $\gamma: R_+ \rightarrow X \times U$ басқару сигналының траекториясы арқылы берілген А жүйесінің $u_\gamma: R_+ \rightarrow U$ траекториясын қарастырайық. Бұл жағдайда фазалық кеңістіктегі $x_\gamma(t)$ траекториясы (21) кәдімгі дифференциалдық теңдеуі және бастапқы шарт $x_\gamma(0) = x_0$ үшін Коши есебінің шешімі болып табылады.

$$\forall t \in R_+ \quad \dot{x}_\gamma(t) = f(x_\gamma(t), u_\gamma(t)) \quad (21)$$

Енді (22) формуламен анықталған $v: R_+ \rightarrow Y \times W$ басқару сигналының траекториясы және бастапқы күйі $y_0 = \mu(x_0)$ арқылы берілген В жүйесінің траекториясын $w_v: R_+ \rightarrow W$ деп белгілейік.

$$\forall t \in R_+ \quad w_v(t) = \rho(x_\gamma(t), u_\gamma(t)) \quad (22)$$

Осы жағдайда фазалық кеңістіктегі жүйе траекториясы $y_v(t)$, яғни $v(t) = (y_v(t), w_v(t))$ траекториясының компоненті, (23) дифференциалдық теңдеуі мен бастапқы шарт $y_v(0) = y_0$ үшін Коши есебінің шешімі болып табылады.

$$\dot{y}_v(t) = g(y_v(t), \rho(x_\gamma(t), u_\gamma(t))) \quad (23)$$

Егер В жүйесінің динамика теңдеуіндегі g функциясы үшін (17) шарты орындалатын болса, онда траекторияның $y_v(t)$ компонентасы үшін (22) дифференциалдық теңдеу (24) түрін қабылдайды.

$$\dot{y}_v(t) = d_{\mu^{-1}(y_v(t))} \mu \left(f(\mu^{-1}(y_v(t)), u_\gamma(t)) \right) \quad (24)$$

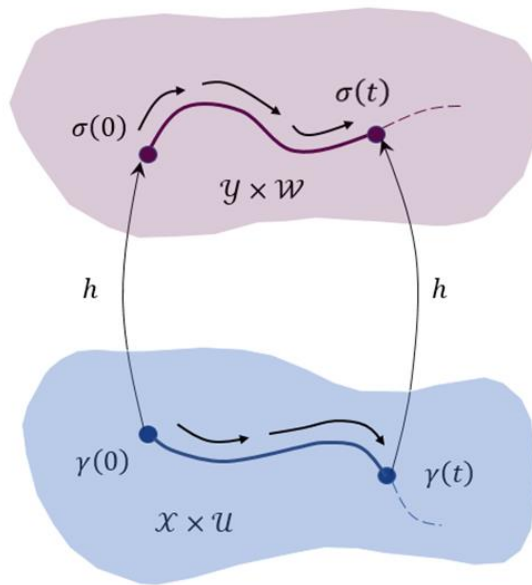
Тікелей тексеру арқылы (25) теңдеумен берілген $y_v(t)$ функциясының (23) дифференциалдық теңдеуі және бастапқы шарт $y_v(0) = y_0$ үшін Коши есебінің шешімі болатынына көз жеткізу қиын емес.

$$\forall t \in R_+ \quad y_v(t) = \mu(x_\gamma(t)) \quad (23)$$

Әрине, А жүйесінің $\gamma(t)$ траекториясын $X \times Y$ көптүрлілігінде параметрлік түрде берілген қисық ретінде қарастыруға болады. Біз (26) теңдеулермен компоненттер бойынша анықталатын h гомеоморфты бейнелеу арқылы алынған $v(t) = h(\gamma(t))$ қисығының бейнесі В жүйесінің траекториясы болатынын дәлелдедік.

$$\forall t \in R_+ \quad y_v(t) = \mu(x_\gamma(t)) \quad w_v(t) = \rho(x_\gamma(t), u_\gamma(t)) \quad (26)$$

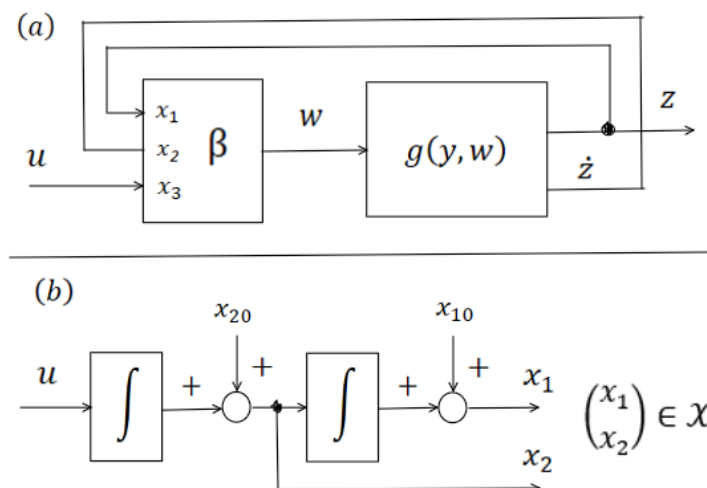
Бұл тұжырым басқарылатын жүйенің еркін таңдап алынған бастапқы күйі $x_0 \in X$ үшін $x_\gamma(0) = x_0$ шарты орындалатын А жүйесінің кез келген γ траекториясы үшін дұрыс болып табылады. Тиісінше, h бейнелеуі арқылы алынған А жүйесінің кез келген траекториясының бейнесі В жүйесінің траекториясы болып табылатынын айтуға болады. Ұқсас түрде, h^{-1} бейнелеуі арқылы басқарылатын В жүйесінің кез келген траекториясының бейнесі А жүйесінің траекториясы болатыны дәлелденеді. Бұл ретте, егер γ – А жүйесінің еркін траекториясы, ал σ – соған сәйкес келетін В жүйесінің траекториясы болса, онда уақыттың кез келген мезетінде $h(\gamma(t)) = \sigma(t)$ және $h^{-1}(\sigma(t)) = \gamma(t)$ теңдіктері орындалады. А және В жүйелерінің траекториялары арасындағы осындай байланыстардың болуы басқарылатын жүйелердің эквиваленттілігі ұғымының бастапқы анықтамасын құрайды. Яғни, жоғарыда басқарылатын А және В жүйелерінің эквиваленттілігі тиісті жүйелерді байланыстыратын эндогендік түрлендірудің бар екендігіне сүйенбестен, тікелей түрде дәлелденді.



1-сурет. $h: X \times U \rightarrow Y \times W$ диффеоморфты бейнелеуімен берілген С класты координаталық түрлендіру арқылы байланысқан, басқарылатын эквивалент жүйелер траекторияларының сәйкестігі

Ескерту – авторлармен құрастырылған

Изоморфизм мен бейнелеу арқылы анықталып, басқарылатын эквивалентті А және В жүйелерін өзара байланыстыратын координаталық түрлендіруді С класты координаталық түрлендіру деп атаймыз. С класына жататын әрбір түрлендіруге физикалық тұрғыдан іске асырылатын статикалық кері байланыс арқылы түрлендіру сұлбасы сәйкес келеді, ол В жүйесімен сипатталатын объектіні А жүйесіне эквивалент объектіге түрлендіреді. Мұндай статикалық кері байланыс арқылы түрлендірудің сұлбасы 2-суретте көрсетілген.



2-сурет. С класты координаталық түрлендіруге сәйкес келетін

В жүйесін статикалық кері байланыс арқылы А жүйесіне түрлендіру

Ескерту – авторлармен құрастырылған

Енгізілген С класты координаталық түрлендірулер жүйенің бастапқы айнымалылары мен таңдалған шығыстар арасындағы дұрыс әрі тегіс бейнелеуді қамтамасыз етеді, бұл динамиканы талдауды және басқарушы әсерлерді синтездеуді жеңілдетуге мүмкіндік береді. Осы түрлендірулердің негізінде әрі қарай С класты координаталық түрлендірулер шешуші рөл атқаратын басқарылатын жазық жүйелер класы қарастырылады, мұнда жүйенің күйлері мен кірістері жазық шығыс және оның туындыларының шектеулі саны арқылы өрнектеледі.

Басқаруы бар жазық жүйелер және С класты түрлендірулер

Анықтама 2. Басқару кеңістігі $U = R^n$ және күй кеңістігі $X = R^n \times R^n \times \dots \times R^n$ болатын басқаруы бар сызықтық жүйе қарастырылады. Бұл жүйеде күй векторы $x \in X$ мына түрде беріледі: $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \forall j \in \{1, 2, \dots, k\} x_j \in R^n$, мұнда динамика теңдеулері (27) түрінде берілген, ал $u \in U$ басқару сигналы болып табылады. Мұндай жүйе басқаруы бар тривиалды сызықтық жүйе деп аталады.

$$\{\dot{x}_1 = x_2 \quad \dot{x}_2 = x_3 \quad \dots \quad \dot{x}_k = u \quad (27)$$

Біз тривиалды сызықтық жүйені $T_{n,k}$ деп белгілейміз, мұнда $n \geq 1$ бүтін санды индекс басқару кеңістігінің өлшемі, ал $k \geq 1$ индексі тривиалды сызықтық жүйенің $x_1, x_2, \dots, x_k$ компоненттерінің санын білдіреді.

$T_{n,k}$ тривиалды сызықтық жүйесін А жүйесі деп атайық және ол С класты ааа түрлендіруі арқылы басқаруы бар қандай да бір бейсызықты В жүйесімен байланысқан болсын. Бұл жағдайда $\mu: X \rightarrow Y$ изоморфизмі үшін (28) формуласының орындалатыны айқын.

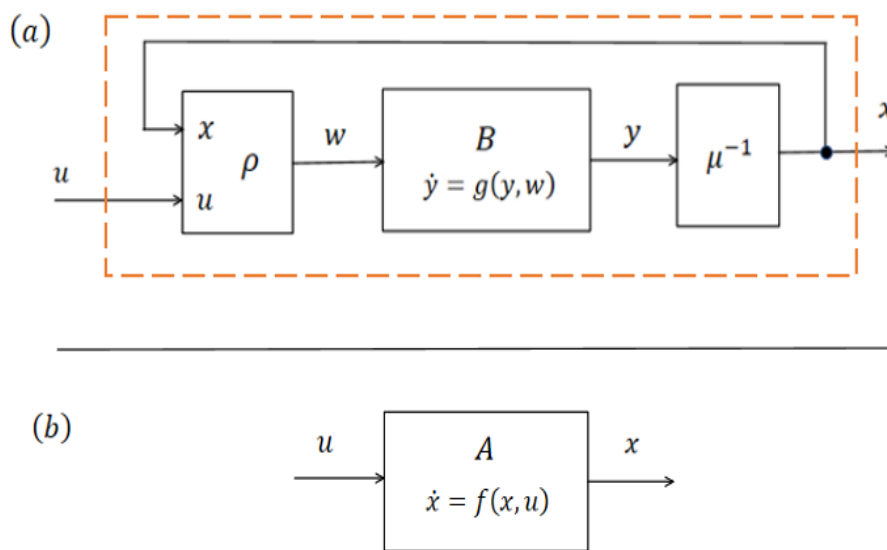
$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X \quad \mu^{-1}(x) = \alpha(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (28)$$

мұнда $\alpha: R^n \times R^n \times \dots \times R^n \rightarrow Y_k$ В типті жазық жүйе үшін анықталған (28) функциясы. Бұл жағдайда В жазық жүйесінің $h: Y \rightarrow R^n$ жазық шығысы $\mu^{-1}: Y \rightarrow X$ кері бейнелеудің компоненті болып табылады, нақтырақ айтқанда $h(y) = x_1$. Сондай-ақ $\rho(x, y)$ бейнелеуі осы кезде В типті жазық жүйе үшін берілген функцияға сәйкес келетіні айқын, бұл аналитикалық түрде (29) формуламен өрнектеледі.

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in X, u \in U \quad \beta(x_1, x_2, \dots, x_k, u) = (x, u) \quad (29)$$

А типті жазық жүйені сызықтық процедурасы С типті координаталық түрлендірумен байланысқан басқару жүйелерін түрлендірудің жалпы процедурасына келтіріледі, оның сұлбасы 3-суретте көрсетілген. Мысалы, басқаруы бар жазық жүйені $T_{n,3}$ тривиалды сызықтық жүйесіне эквивалентті түрде сызықтық сұлбасы 3-суретте бейнеленген. Бұл мысалдың маңыздылығы мынада: күштік басқаруы бар тізбекті манипуляторлар дәл осы жазық жүйелер класына жатады, яғни n-буынды манипулятор $T_{n,3}$ жүйесіне эквивалент болып табылады.

Енгізілген С класты координаталық түрлендірулер және басқаруы бар жазық жүйелерді сызықтық процедурасы бейсызықты объектілердің эквиваленттілігін абстрактылы сипаттаудан басқару заңдарын практикалық синтездеуге көшуге мүмкіндік береді. Алынған жүйенің сызықтық бейнеленуі объект динамикасын тиімді түрде компенсациялауға болатын траекториялық басқару алгоритмдерін құруға негіз қалайды. Осыған байланысты алдағы бөлімде сызықтық объектіні траекториялық басқару қарастырылады және тізбекті манипуляторға арналған классикалық Computed Torque Control әдісінің ұсынылған жалпыланған тәсіл шеңберінде жазық жүйені траекториялық басқарудың жекелеген жағдайы болып табылатыны көрсетіледі.



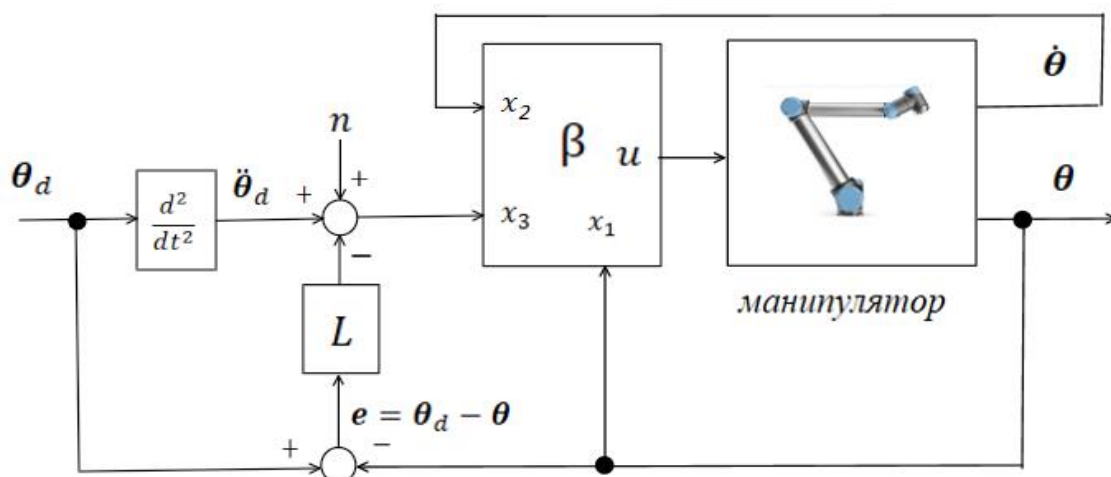
3-сурет. Динамика теңдеуі $\dot{y} = g(y, w)$ түрінде берілген басқаруы бар жазық жүйені сызықтық сұлбасы, оны басқаруы бар тривиалды сызықтық $T_{n,3}$ жүйесіне түрлендіреді (a). $T_{n,3}$ жүйесі құрылымдық тұрғыдан тізбектей қосылған екі интегратордан тұратын тізбек ретінде көрсетіледі (b)

Ескерту – авторлармен құрастырылған

НӘТИЖЕЛЕР

Сызыкталанған объектіні траекториялық басқару. Манипуляторды траекториялық басқарудың СТС әдісі — жазық жүйені траекториялық басқару әдісі ретінде.

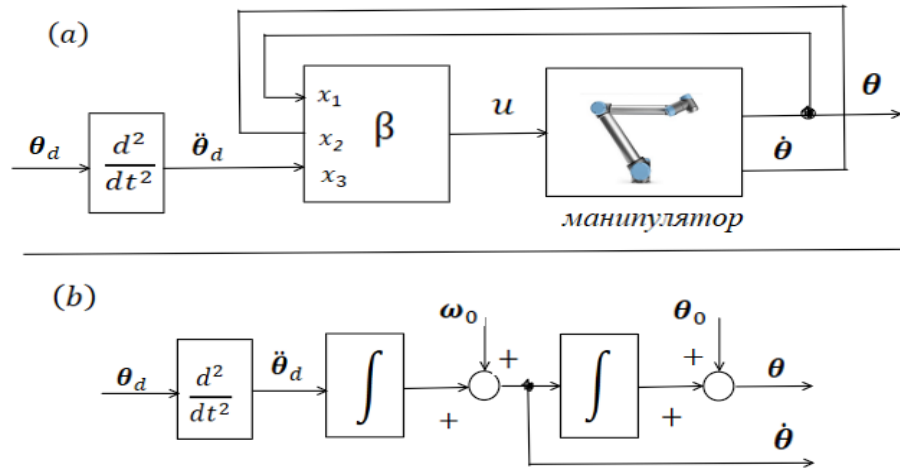
Сызықтық манипулятор екі тізбектей қосылған n-арналы интеграторлар тізбегіне эквивалент болғандықтан, сызықтық жүйе үшін бағдарламалық траекториялық басқару есебі толықтай тривиал болып табылады. 4-суретте тізбекті манипуляторды бағдарламалық траекториялық басқарудың базалық сұлбасы көрсетілген.



4-сурет. Манипуляторды бағдарламалық траекториялық басқару жүйесінің блок-сұлбасы (a), бағдарламалық траекториялық басқарудың эквивалентті сызықтық жүйесі (b)

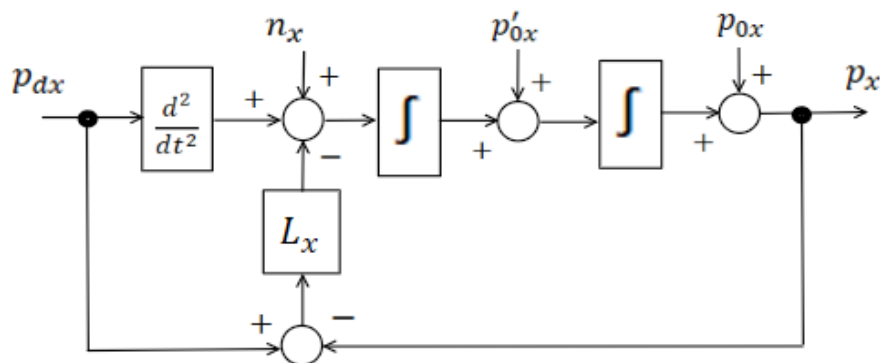
Ескерту – авторлармен құрастырылған

Әлбетте, бұл базалық сұлба орнықсыз болып табылады және осыған байланысты практикалық қолдануға жарамсыз. Жүйені орнықтандыратын сызықтық реттегіші бар қосымша кері байланыс контурын енгізу арқылы траекториялық басқару жүйесін алуға болады, оның блок-сұлбасы 5-суретте көрсетілген.



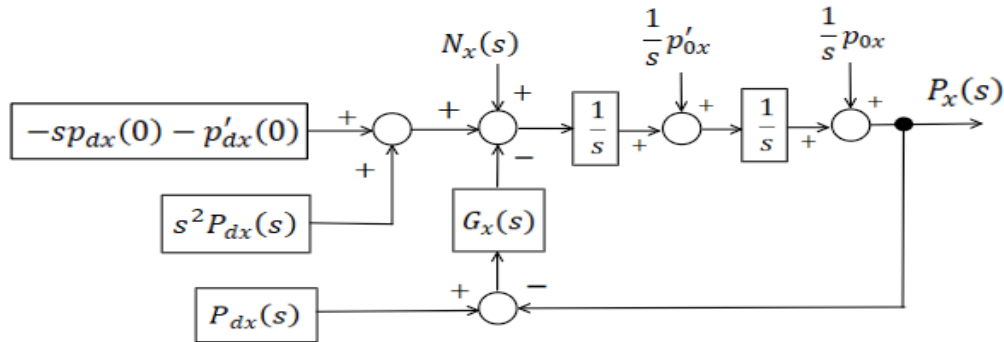
5-сурет. Манипулятордың ағымдағы конфигурациясы бойынша кері байланыс контуры бар орнықтандырылған траекториялық басқару жүйесінің блок-сұлбасы
Ескерту – авторлармен құрастырылған

Кері әсерін сызықтық сигнал түрлендіргішінің x_3 кірісіне түсетін сигналдар қосындысына $n(t)$ шуылдық сигналын қосу арқылы модельдейміз. L сызықтық сигнал түрлендіргіші параллель қосылған, бір-біріне толықтай ұқсас n сызықтық сигнал түрлендіргіштерінен L_x тұрады, мұнда $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ — арнаның нөмірін көрсететін бүтін индекс, ал n — тізбекті манипулятордың буындар саны. Орнықтандырылған жүйенің құрылымы классикалық есептелетін моменттер әдісіне негізделген траекториялық басқару контроллерінің құрылымымен толықтай бірдей екені анық. n -буынды манипуляторды траекториялық басқарудың түрлендірілген жүйесіне эквивалент жүйені өзара тәуелсіз, бірдей бірөлшемді сызықтық жүйелердің жиынтығы ретінде қарастыруға болады. 6-суретте осындай бірдей арналардың бірінің блок-сұлбасы көрсетілген.



6-сурет. Тізбекті манипулятордың сызықтыланған моделі үшін траекториялық басқару жүйесіндегі x арнасының эквивалентті құрылымдық сұлбасы
Ескерту – авторлармен құрастырылған

Қарастырылып отырған траекториялық басқару жүйесінің арналарын сипаттайтын осындай бірөлшемді сызықтық жүйенің жұмысын талдау үшін Лаплас түрлендіруін қолдану ыңғайлы болып табылады. Бұл ретте $f(t) = c \in R$ түріндегі тұрақты функцияларды $s\eta(t)$ функциялары арқылы бейнелейміз, мұндағы η – Хэвисайд функциясы. Сигнал түрлендіргіштері L_x жұмысын сипаттайтын беріліс функциясын G_x деп белгілейміз, сондай-ақ $P_x(s) = L(p_x(t))$. және $P_{dx}(s) = L(p_{dx}(t))$ белгілерін енгіземіз. $L(\ddot{p}_{dx}(t)) = s^2 P_{dx}(s) - sp_{dx}(0) - p'_{dx}(0)$ және $L(\eta(t)) = \frac{1}{s}$ екенін ескере отырып, манипулятордың траекториялық басқару жүйесіндегі бірөлшемді арналардың жұмысын сипаттайтын сигналдардың бейнелері үшін 7-суретте көрсетілген сұлбаны аламыз.



7-сурет. Манипуляторды траекториялық басқару жүйесіндегі бірөлшемді арналардың жұмысын сипаттайтын сұлба

Ескерту – авторлармен құрастырылған

$$P_x(s) = P_{dx}(s) + E_x^d(s) + \frac{N_x(s)}{s^2 - G_k(s)} \quad (30)$$

мұнда комплекс айнымалының $E_x^d(s)$ функциясы (31) формуламен анықталған.

$$E_x^d(s) = \frac{s(p_{0x} - p_{dx}(0)) + (p'_{0x} - p'_{dx}(0))}{s^2 - G_k(s)} \quad (31)$$

Әрине, $E_x^d(s)$ функциясын $e_x^d(t)$ функциясының Лаплас бойынша бейнесі ретінде қарастыруға болады. $E_x^d(s)$ функциясының (31) анықтамасынан көрініп тұрғандай, $e_x^d(t)$ функциясы (32) бастапқы шарттарымен берілген (32) дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебінің шешімі болып табылады.

$$\ddot{e}_x^d - U e_x^d = 0 \quad (32)$$

$$e_x^d(0) = p_{0x} - p_{dx}(0) \quad \dot{e}_x^d(0) = p'_{0x} - p'_{dx}(0) \quad (33)$$

(32) дифференциалдық теңдеуінде U ретінде G_x беріліс функциясымен анықталатын сызықтық сигнал түрлендіргіштің әрекетін сипаттайтын сызықтық оператор белгіленген. (30) теңдеуіндегі $\frac{N_x(s)}{s^2 - G_k(s)}$ мүшесі (34) формуламен берілген $W_f(s)$ беріліс функциясымен сипатталатын сызықтық сүзгі арқылы өткізілген $n_x(t)$ модельдеуші бұзушы сигналдың Лаплас бойынша бейнесін білдіреді.

$$W_f(s) = \frac{1}{s^2 - G_k(s)} \quad (34)$$

Осылайша, траекториялық басқару жүйесінің $y_x(t)$ шығысы (35) түріндегі үш функцияның сызықтық суперпозициясы болып табылады.

$$\forall t \geq 0 \quad p_x(t) = p_{dx}(t) + e_x^d(t) + L^{-1}(W_f N_x) \quad (35)$$

(35) формуласына жүргізілген элементар талдаудан көрініп тұрғандай, траекториялық басқару жүйесінің орнықтылығын қамтамасыз ету үшін L_x сызықтық сигнал түрлендіргіштері төменде тұжырымдалған 1-критерийді қанағаттандыруы

жеткілікті. Сондай-ақ, (35) суперпозициясының $L^{-1}(W_f N_x)$ компонентімен сипатталатын кері әсерлердің жүйе жұмысына ықпалын барынша азайту үшін L_x бірдей сигнал түрлендіргіштеріне сәйкес келетін G_x беріліс функциясы үшін 2-критерийдің орындалуы қажетті екені айқын.

1 Критерийі. L_x және L_y сигналдарының бірдей сызықтық түрлендіргіштеріне сәйкес келетін U сызықтық операторы (36) дифференциалдық теңдеуін тұрақтандыруы тиіс.

$$\ddot{e} - Ue = 0 \quad (36)$$

2 Критерийі. L_x және L_y сигналдарының сызықтық түрлендіргіштеріне сәйкес келетін G беріліс функциясы (37) кері әсерлерді басу шартын қанағаттандыруы тиіс.

$$\forall \omega \geq 0 |G(i\omega) + \omega^2| > 1 \quad (37)$$

ҚОРЫТЫНДЫ

Осы жұмыста басқаруы бар бейсызықты жазық жүйелердің траекториялық басқару әдісі ұсынылады, ол жалпыланған СТС әдісі деп аталады. Дәстүрлі түрде тізбекті манипуляторларға қолданылатын классикалық Computed Torque Control әдісі арнайы типтегі, А класына жатқызылған жазық жүйелер үшін траекториялық басқарудың неғұрлым жалпы тәсілінің жекелеген жағдайы ретінде қарастырылуы мүмкін екені көрсетіледі. Аталған жүйелер класы үшін басқаруы бар бейсызықты жүйені оған эквивалентті тривиалды сызықтық басқару жүйесіне келтіретін сызықтық процедура ұсынылған. Ұсынылған тәсілдің негізгі элементі эквивалентті жүйелердің күй және басқару кеңістіктері арасындағы диффеоморфты бейнелеулермен анықталатын С класты координаталық түрлендірулер болып табылады. Мұндай түрлендірулер басқаруы бар эквивалентті жүйелердің траекторияларының сәйкестігін қамтамасыз ететіні және басқару жүйелері теориясы тұрғысынан эквиваленттілік қатынасын сақтайтыны көрсетіледі. Бұл бастапқы бейсызықты басқару жүйесін оның сызықтық эквивалентімен формалды түрде байланыстыруға мүмкіндік береді. Жұмыста сондай-ақ С класты координаталық түрлендіруге сәйкес келетін статикалық кері байланыс арқылы В класына жататын жүйені А класына жататын жүйеге түрлендіру көрсетілген. Бұл нәтиже ұсынылған әдістің әмбебаптығын және оның бейсызықты басқару объектілерінің анағұрлым кең класына қолданылу мүмкіндігін айқындайды. Жазық басқарылатын жүйені сызықтық үдерісін, сондай-ақ оны құрылымдық тұрғыдан тізбектей жалғанған интеграторлар тізбегіне эквивалентті тривиалды сызықтық басқару жүйесіне түрлендіруді көрсетелетін құрылымдық сұлбалар келтірілген. Манипуляторды бағдарламалық траекториялық басқарудың блок-сұлбалары және оған сәйкес эквивалентті сызықтық жүйенің сұлбалары, сондай-ақ манипулятордың ағымдағы конфигурациясы бойынша кері байланыс контуры бар тұрақтандырылған траекториялық басқару жүйесінің сұлбалары келтірілген. Қосымша түрде тізбекті манипулятордың сызықтық моделін пайдалана отырып құрылған траекториялық басқару жүйесінің жекелеген арналарын сипаттайтын эквивалентті құрылымдық сұлбалар және бірөлшемді басқару арналарының жұмысын бейнелейтін сұлбалар қарастырылған. Бұл көрнекі бейнелер көпөлшемді жүйені тәуелсіз арналарға декомпозициялау мүмкіндігін айқын көрсетіп, ұсынылған әдістің құрылымдық айқындығын айқындайды.

Болашақ зерттеулердің бағыты ретінде ұсынылған басқару құрылымдары мен сұлбаларын сандық модельдеу және визуализациялау үшін модельдеу ортасын қолдану жоспарлануда. Модельдеу ортасын пайдалану С класты координаталық түрлендірулердің қасиеттерін көрнекі түрде зерттеуге, сондай-ақ сызықтық реттегіш параметрлерінің траекториялық басқару сапасына және сыртқы әсерлерді басу тиімділігіне ықпалын талдауға мүмкіндік береді. Мұндай модельдеу ұсынылған жалпыланған СТС әдісін тереңірек түсінудің құралы болып, оның робототехникалық жүйелерді басқарудың практикалық міндеттеріне қолданылу мүмкіндігін растайды.

МҮДДЕЛЕР ҚАҚТЫҒЫСЫ: Авторлар мүдделер қақтығысының жоқтығын мәлімдейді.

АЛҒЫС: Авторлар әдістемелік қолдау және пайдалы талқылаулар үшін әріптестеріне, сондай-ақ мақаланың сапасын жақсартуға ықпал еткен құнды ескертулер үшін анонимді рецензенттерге алғыс білдіреді.

ЖАСАНДЫ ИНТЕЛЛЕКТ ТЕХНОЛОГИЯЛАРЫН ПАЙДАЛАНУ ТУРАЛЫ ХАБАРЛАМА: Осы жұмысты дайындау барысында мәтінді құрылымдау, редакциялау және аннотацияны қысқарту кезеңдерінде генеративті жасанды интеллект құралы — OpenAI GPT-5 пайдаланылды. Барлық ғылыми тұжырымдар мен нәтижелер автордың жауапкершілігімен ұсынылады.

ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

- Ahmed, M. S. (2021). Robust computed torque control for uncertain robotic manipulators. *Engineering Journal*. <https://doi.org/10.22153/kej.2021.09.002>
- Beaver, L. E. (2024). Optimal control of differentially flat systems. *Applied Mathematics and Computation*. <https://arxiv.org/pdf/2103.03339v2>
- Díaz, E. V., Slama, J., Dutra, M., Lengerke, O., & Morales Tavera, M. (2021). Trajectory tracking for robot manipulators using differential flatness. *Ingeniería e Investigación*, 41(2), e86791. <https://doi.org/10.15446/ing.investig.v41n2.86791>
- Han, S., Wang, H., Tian, Y., & Christov, N. (2020). Time-delay estimation based computed torque control with robust adaptive RBF neural network compensator for a rehabilitation exoskeleton. *ISA Transactions*, 97, 171–181. <https://doi.org/10.1016/j.isatra.2019.07.030>
- Kallel, H., Iqbal, K., et al. (2025). Online estimation of manipulator dynamics for computed torque control. *Sensors*, 25(22), 6831. <https://doi.org/10.3390/s25226831>
- Khalil, H. K. (2020). *Nonlinear systems*. Pearson. https://www.academia.edu/49178454/-Khalil_2002_Nonlinear_System
- Krasavin, A., Nazenova, G., Dairbekova, A., Kadyroldina, A., Haidegger, T., & Alontseva, D. (2025). New differential flatness-based trajectory tracking method and its application to a wheeled mobile robot control. *Preprints.org*. <https://doi.org/10.20944/preprints-202512.1150.v1>
- Kussaiyn-Murat, A., Kadyroldina, A., Krasavin, A., Tolykbayeva, M., Orazova, A., Nazenova, G., Krak, I., Haidegger, T., & Alontseva, D. (2025). Application of discrete exterior calculus methods for the path planning of a manipulator performing thermal plasma spraying of coatings. *Sensors*, 25(3), 708. <https://doi.org/10.3390/s25030708>
- Pishkhani, A. J. S. (2025). Gray-box computed torque control. *arXiv preprint*. <https://arxiv.org>
- Rigatos, G., Abbaszadeh, M., & Pomares, J. (2023). Flatness-based control in successive loops for electropneumatic actuators and robots. *IFAC Journal of Systems and Control*, 25, Article 100222. <https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2023.100222>
- Shadrin, G. K., Alontseva, D. L., Kussaiyn-Murat, A. T., Kadyroldina, A. T., Ospanov, O. B., & Haidegger, T. (2020). Application of compensation algorithms to control the movement of a robot manipulator. *Acta Polytechnica Hungarica*, 17(1), 191–214. <https://doi.org/10.12700/APH.17.1.2020.1.10>
- Siciliano, B., & Khatib, O. (2020). *Springer handbook of robotics*. Springer. https://www.academia.edu/26665877/Handbook_Springer_of_Robotics?utm_source=chatgpt.com
- Spong, M. W., Hutchinson, S., & Vidyasagar, M. (2020). *Robot modeling and control*. Wiley. https://books.google.co.id/books?id=DdJNDwAAQBAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false
- Utkin, V., Poznyak, A., & Orlov, Y. (2020). *Road map of sliding mode control*. Springer. doi:10.1007/978-3-030-41709-3

- Vidaković, J., Kvrđić, V., Lazarević, M. P., & Stepanić, P. (2020). Computed torque control for a spatial disorientation trainer. *Facta Universitatis, Series: Mechanical Engineering*, 18(2), 269–280. <https://doi.org/10.22190/FUME190919003V>
- Wei, S. X., et al. (2021). Differential flatness for aerial and robotic manipulators. *Robotics*. <https://arxiv.org/pdf/2111.01302>

Авторлар туралы мәліметтер
Информация об авторах
Information about authors



Толыкбаева Марал Бакыткановна – Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетінің докторанты, Өскемен қ., Қазақстан,

Толыкбаева Марал Бакыткановна – докторант Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан,

Tolykbayeva Maral Bakytkanovna – Doctoral Student, D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.

e-mail: maralsamekenova@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8695-0231>



Құсайын-Мұрат Әсел Түгелбайқызы – PhD доктор, Цифрлық технологиялар және жасанды интеллект мектебінің қауымдастырылған профессоры, Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан.

Құсайын-Мұрат Әсел Түгелбайқызы – доктор PhD, ассоциированный профессор Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта, Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Kussaiyn-Murat Assel – PhD, Associate Professor, School of Digital Technology and Artificial Intelligence, East Kazakhstan Technical University named after D. Serikbaev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan, e-mail: akussaynmurat@edu.ektu.kz,

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6867-6638>



Даирбекова Адема Ерлановна – Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университетінің докторанты, Өскемен қ., Қазақстан,

Даирбекова Адема Ерлановна – докторант Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан,

Dairbekova Adema Yerlanovna – Doctoral Student, D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan.

e-mail: dairbekova-adema@mail.ru

ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2844-2094>



Кадыролдина Альбина Талапжановна – PhD, «Жүйелік талдау және басқару» кафедрасының доцентінің м.а., Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан,

Кадыролдина Альбина Талапжановна – PhD, и.о. доцента кафедрой “Системного анализа и управления” Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан,

Kadyroldina Albina Talapzhanovna – PhD, Acting Associate Professor of the Department of System Analysis and Management, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Kazakhstan, Astana, Kazakhstan.

e-mail: kadyroldina_at@enu.kz

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5572-4792>



Красавин Александр Львович – т.ғ.к., Цифрлық технологиялар және жасанды интеллект мектебінің қауымдастырылған профессоры, Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан,

Красавин Александр Львович – к.т.н., ассоциированный профессор Школы цифровых технологий и искусственного интеллекта, Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан

Krassavin Alexandr Lvovich – Cand. Tech. Sci., Associate Professor, School of Digital Technology and Artificial Intelligence, D. Serikbayev East Kazakhstan Technical University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan
e-mail: akrassavin@ektu.kz



Beszedes Bertalan – PhD, инженерия кафедрасының доценти (Adjunktus), Óbuda University, Alba Regia факультеті, Секешфехервар, Венгрия.

Beszedes Bertalan – PhD, доцент (Adjunktus) кафедры инженерии, Óbuda University, Alba Regia Kar, Székesfehérvár, Венгрия.

Beszedes Bertalan – PhD, Associate Professor (Adjunktus) of the Department of Engineering, Óbuda University, Alba Regia Faculty, Székesfehérvár, Hungary.

e-mail: beszedes.bertalan@amk.uni-obuda.hu

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9350-1802>